

Lernumgebungen und „gute Aufgaben“ im Mathematikunterricht der Grundschule

Möglichkeiten der Differenzierung mit Aufgaben im heterogenitätssensiblen Unterricht

Thomas Rottmann^{1,*}

¹ Universität Bielefeld

* Kontakt: Universität Bielefeld,

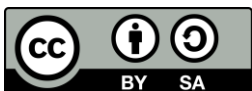
Fakultät für Mathematik, Institut für Didaktik der Mathematik,

Universitätsstr. 25, 33615 Bielefeld

thomas.rottman@uni-bielefeld.de

Zusammenfassung: Der Beitrag beschäftigt sich mit der Qualität von Aufgaben im Mathematikunterricht sowie mit einer Unterrichts- und Aufgabekultur, die Anforderungen eines inklusionssensiblen Unterrichts Rechnung trägt. Ausgehend von der Frage, was „gute Aufgaben“ auszeichnet, wird diskutiert, wie das Potenzial „guter Aufgaben“ in Form von Lernumgebungen im Mathematikunterricht mit heterogenen Lerngruppen genutzt werden kann. Eine besondere Bedeutung kommt in diesem Zusammenhang Ansätzen zur Differenzierung mit Aufgaben zu. Der vorliegende Beitrag richtet dabei den Fokus auf die Differenzierung mit gestuften Aufgaben sowie auf die natürliche Differenzierung, welche auf der Verwendung von selbstdifferenzierenden Aufgaben aufbaut.

Schlagerörter: Mathematikunterricht; Heterogenität; Differenzierung; Lernumgebung; Aufgabe



1 Aufgaben im Mathematikunterricht – Einführung und Beispiele

Das Fach Mathematik und der Mathematikunterricht werden, vermutlich wie kaum ein anderes Fach in der Schule, mit dem Bearbeiten von Aufgaben verbunden. Aufgaben prägen den Mathematikunterricht und stellen das zentrale Organisationselement des Mathematikunterrichts dar (Wollring, 2009).

„Aufgaben sind das tägliche Brot des Mathematikunterrichts. Das gilt für Lehrende wie Lernende gleichermaßen.“ (Büchter & Leuders, 2005, S. 7)

Dabei kommen Aufgaben unterschiedliche Funktionen zu. Sie dienen u.a. als Anlass für mathematische Aktivitäten im Unterricht und bei den Hausaufgaben, zur Überprüfung von Leistungen in Klassenarbeiten und zur Unterrichtsentwicklung (vgl. Büchter & Leuders, 2005, S. 7). Durch die Auseinandersetzung mit und Bearbeitung von Aufgaben entwickeln Schüler*innen wichtige mathematische Kompetenzen.

Auch in Schulbüchern sind Aufgaben zentrale Elemente. Regelmäßig werden Schulbücher neu überarbeitet und mit neuen Aufgaben bestückt. Selbst in Inhaltsbereichen, die sich seit Jahrzehnten in den Lehrplänen finden, gibt es mit jeder neuen Überarbeitung eines Schulbuchs auch neue Aufgaben (vgl. die Beispiele zur Addition und Subtraktion im Zahlenraum bis 100 in Abb. 1 auf dieser und Abb. 2 auf der folgenden Seite). Dabei haben sich natürlich die Aufgaben im Sinne der konkreten Rechenaufgaben (wie $6+4$, $63+5$, ...) genauso wenig geändert wie die (arithmetischen) Ergebnisse dieser Aufgaben. Und trotzdem sehen wir Veränderungen in den Aufgaben, in den Aufgabenstellungen und im schulischen Umgang mit diesen. Über die Aufgaben soll anscheinend noch etwas anderes vermittelt und gelernt werden, was über das schlichte Ausrechnen des Ergebnisses der mathematischen Rechenaufgabe hinausgeht.

Bei einem genaueren Blick in Schulbücher lässt sich feststellen, dass auch in älteren Schulbüchern bereits unterschiedliche Arten von Aufgaben enthalten sind. Ein Beispiel stammt aus der Ausgabe des Schulbuchs *Die Welt der Zahl* – Heft 1 für das 1. Schuljahr aus dem Jahr 1949. Es gibt in diesem Schulbuch sehr viele Rechenaufgaben, bei denen das Ausrechnen im Vordergrund steht und primär rechnerische Fertigkeiten geübt werden (vgl. Abb. 1). Es gibt aber auch Aufgaben, bei denen es zwar ums Rechnen, bei denen es aber noch um etwas Anderes als das bloße Anwenden von mathematischen Verfahren und Strategien geht. Ein Beispiel dafür ist die Aufgabe: „Mache 12 Aufgaben, bei denen die Antwort immer 10 ist!“ (vgl. Abb. 1 unten). Hier wird von den Schüler*innen gefordert, nicht eine vorgegebene Rechenaufgabe zu lösen, sondern selbst passende Aufgaben zu finden, die zu einer vorgegebenen Bedingung oder Struktur passen.

26. $10 + 5 - 4 =$	27. $15 + 3 - 8 =$	28. $10 + 9 - 7 =$
$30 + 7 - 5 =$	$21 + 7 - 3 =$	$31 + 4 - 5 =$
$50 + 9 - 7 =$	$42 + 2 - 4 =$	$50 + 7 - 3 =$
$70 + 4 - 3 =$	$64 + 5 - 6 =$	$72 + 6 - 8 =$
$90 + 8 - 6 =$	$83 + 4 - 7 =$	$93 + 5 - 4 =$
$80 + 6 - 2 =$	$96 + 3 - 5 =$	$81 + 8 - 9 =$
29. Mache 12 Aufgaben, bei denen die Antwort immer 10 ist!		
(Beispiel: $1 + 9 = 10$; $30 - 20 = 10$; $18 - 8 = ?$)		

Abbildung 1: Aufgabenbeispiel aus dem Schulbuch *Die Welt der Zahl* – Heft 1 (1949, S. 46)

Auch in einer neueren, aber ebenfalls schon recht alten Ausgabe dieses Schulbuchs aus dem Jahr 1998 finden sich neben den traditionellen Rechenaufgaben andere Aufgaben,

bei denen die Schüler*innen in anderer Weise aktiv werden müssen: „Kannst du zu jedem Päckchen noch eine passende Aufgabe rechnen?“ oder „Was fällt dir auf?“ (vgl. Abb. 2).

6 Kannst du zu jedem Päckchen noch eine passende Aufgabe rechnen?				
a) $62 + 15$	b) $54 + 43$	c) $77 + 16$	d) $48 + 34$	e) $58 + 35$
$52 + 25$	$44 + 53$	$67 + 26$	$38 + 44$	$48 + 45$
$42 + 35$	$34 + 63$	$57 + 36$	$28 + 54$	$38 + 55$
7 Was fällt dir auf?				
a) $37 + 42 = \underline{\quad}$	b) $25 + 53 = \underline{\quad}$	c) $47 + 24 = \underline{\quad}$	d) $55 + 18 = \underline{\quad}$	
$32 + 47 = \underline{\quad}$	$23 + 55 = \underline{\quad}$	$44 + 27 = \underline{\quad}$	$58 + 15 = \underline{\quad}$	
e) $35 + 41 = \underline{\quad}$	f) $27 + 62 = \underline{\quad}$	g) $32 + 59 = \underline{\quad}$	h) $16 + 37 = \underline{\quad}$	

Abbildung 2: Aufgabenbeispiel aus dem Schulbuch *Welt der Zahl*, 2. Schuljahr (1998, S. 102)

Diese Aufgaben erfordern eine andere Antwort als die Angabe einer Zahl als Ergebnis der Rechnung. Sie bieten damit aber möglicherweise auch andere Lerngelegenheiten als Aufgaben, die sich auf ein reines Ausrechnen vorgegebener Rechensätze beschränken.

In der Mathematikdidaktik wird seit etlichen Jahren über die Qualität von Aufgaben diskutiert und auf die Bedeutung von Aufgaben für die (Weiter-)Entwicklung des Mathematikunterrichts hingewiesen. Der vorliegende Beitrag geht auf die Frage ein, inwiefern es „gute“ Aufgaben für den Mathematikunterricht gibt und was diese auszeichnet (Kap. 2). Anschließend wird der Blick auf eine angemessene Unterrichts- und Aufgabenkultur gerichtet (Kap. 3). Im Hinblick auf den Umgang mit Heterogenität kommt dabei Ansätzen zur Differenzierung mit Aufgaben im Mathematikunterricht (Kap. 4) eine besondere Bedeutung zu.

2 „Gute Aufgaben“ im Mathematikunterricht

Die eingangs dargestellten Beispiele zeigen Aufgaben, bei denen es nicht nur um das Ausrechnen von Ergebnissen oder die Anwendung weiterer inhaltsbezogener Kompetenzen geht. In der Mathematikdidaktik wird in diesem Kontext häufig die Bezeichnung „gute Aufgabe“ verwendet. Dabei stellt sich natürlich die Frage, was genau eine „gute Aufgabe“ ist. Büchter und Leuders beantworten diese Frage so: „Das kommt darauf an!“ (Büchter & Leuders, 2005, S. 9). Sie betonen, dass die Funktion, welche eine Aufgabe übernehmen soll, entscheidend dafür ist, ihre Güte im Sinne ihrer Eignung für den angestrebten Zweck einzuschätzen.

2.1 „Gute Aufgaben“ und prozessbezogene Kompetenzen

Geht es ausschließlich oder zumindest primär um die Förderung inhaltsbezogener Kompetenzen wie der Entwicklung von Rechenstrategien, wird üblicherweise nicht von guten Aufgaben gesprochen. Wenn aber z.B. bei Aufgaben zur Addition im Zahlenraum bis 100 zusätzlich Auffälligkeiten im Sinne von Zusammenhängen zwischen Teilaufgaben erkannt und beschrieben werden sollen (wie in den Beispielen in Abb. 2 unten), dann regen diese Aufgaben zum (fachbezogenen) Kommunizieren und zum mathematischen Argumentieren an. Neben den inhaltsbezogenen Kompetenzen sind bei diesen Aufgaben die in den Bildungsstandards beschriebenen prozessbezogenen Kompetenzen (mathematisch argumentieren, Probleme mathematisch lösen, mathematisch darstellen, mathematisch kommunizieren, mathematisch modellieren sowie mit mathematischen Objekten

und Werkzeugen arbeiten; vgl. KMK, 2022, S. 9) relevant. Der Begriff der „guten Aufgabe“ wird in der Mathematikdidaktik praktisch durchgängig im Zusammenhang mit diesen prozessbezogenen Kompetenzen verwendet.

„Gute Aufgaben sind Aufgaben, welche bei Schülern in Verbindung mit grundlegenden mathematischen Begriffen und Verfahren die Entwicklung prozessbezogener Kompetenzen unterstützen.“ (Walther, 2004, S. 10)

2.2 Merkmale „guter Aufgaben“

Neben einer Förderung prozessbezogener Kompetenzen werden in der Literatur weitere Merkmale „guter Aufgaben“ beschrieben. „Gute Aufgaben“ besitzen eine gewisse Offenheit und hinreichende Komplexität, tragen substanzielle mathematische Muster und Strukturen in sich und regen diesbezügliche Einsichten an. Sie bieten verschiedene Zugänge auf unterschiedlichen Niveaus, erlauben unterschiedliche Lösungsmöglichkeiten und besitzen ein reichhaltiges Potenzial für Diskussionen, für Fortführungen und für Variationen (Krauthausen, 2018; Krauthausen & Scherer, 2014; Ruwisch, 2003; Ulm, 2008; Walther, 2004; Walther et al., 2007).

Sucht man nach „guten Aufgaben“ für den Mathematikunterricht in der Grundschule, so stößt man häufig auf Beispiele zu besonderen Übungsformaten wie z.B. Zahlenmauern (Schipper et al., 2015; Wittmann & Müller, 1994). Ein Vorzug dieses Übungsformats ist das einfache Aufbauprinzip: Die Zahlen aus zwei benachbarten Steinen werden addiert und das Ergebnis wird in den darüber liegenden Stein geschrieben (vgl. Abb. 3). Mit diesem Prinzip lassen sich Zahlenmauern mit einer beliebigen Anzahl an Schichten konstruieren.

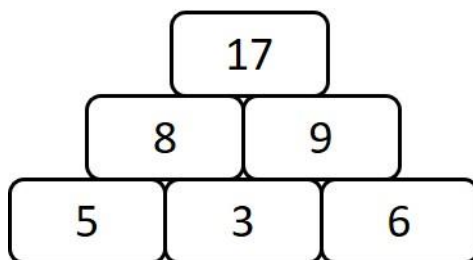


Abbildung 3: Beispiel für das Übungsformat Zahlenmauern (eigene Darstellung)

An dieser Stelle ist es jedoch wichtig zu betonen, dass nicht das Übungsformat Zahlenmauern per se eine „gute Aufgabe“ darstellt. Werden die fehlenden Zahlen in der Zahlenmauer aus Abb. 4 bestimmt, so geschieht das durch einfache Addition jeweils zweier Zahlen. Der Unterschied zu einem Päckchen mit Additionsaufgaben (vgl. Abb. 5, auf der folgenden Seite) besteht im Wesentlichen in der Form der Darstellung, in welcher z.B. auf die mathematischen Symbole „+“ und „=“ verzichtet wird. Dies allein macht diese Zahlenmauer jedoch noch nicht zu einer guten Aufgabe. Prozessbezogene Kompetenzen werden mit dieser Aufgabe nicht gefördert.

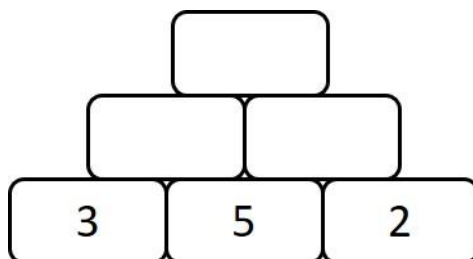


Abbildung 4: Grundformat der Zahlenmauer (eigene Darstellung)

$3 + 5 = \underline{\quad}$
$5 + 2 = \underline{\quad}$
$8 + 7 = \underline{\quad}$

Abbildung 5: Additionsaufgaben aus der Zahlenmauer in Abbildung 4 als Aufgabepäckchen (eigene Darstellung)

Dies ändert sich jedoch, wenn wir Variationen an der Zahlenmauer vornehmen. Bei der Zahlenmauer in Abb. 6 müssen die Schüler*innen eine Strategie zur Lösung des Problems entwickeln, wie sie die fehlenden Zahlen bestimmen können, wenn nicht in beiden benachbarten Steinen Zahlen vorgegeben sind. Dabei müssen Beziehungen zwischen den Rechenoperationen Addition und Subtraktion erkannt und genutzt werden.

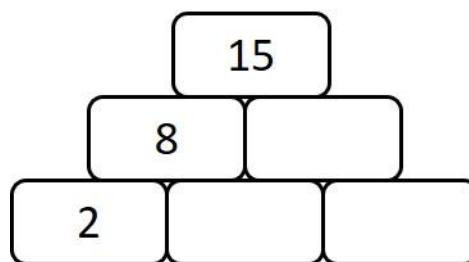


Abbildung 6: Zahlenmauer mit fehlenden Zahlen in den unteren Schichten (eigene Darstellung)

Die drei Zahlenmauern in Abbildung 7 stehen in einem Zusammenhang zueinander. Die Schüler*innen müssen diesen Zusammenhang erkennen und verbalisieren und sind dazu aufgefordert, mathematische Begründungen für die Veränderung des Decksteins zu finden.

Vergleiche die Zahlenmauern. Was passiert mit dem Deckstein?
Begründe, warum das so ist.

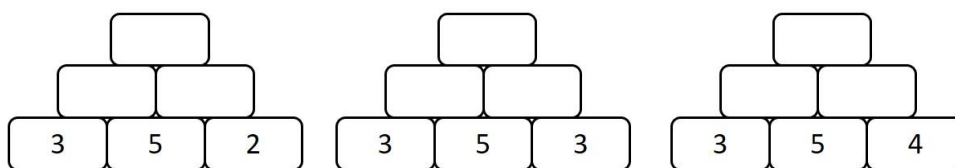


Abbildung 7: Zahlenmauern, die in einem Zusammenhang zueinander stehen (eigene Darstellung).

Erst diese oder ähnliche Veränderungen können aus einer Zahlenmauer auch tatsächlich eine „gute Aufgabe“ machen, die nicht nur rechnerische, sondern auch prozessbezogene Kompetenzen erfordert und fördert.

3 Von Aufgaben zu einer angemessenen Unterrichts- und Aufgabenkultur

Wichtig bei der Behandlung solcher Aufgaben im Unterricht ist es, dass die Besprechung der entdeckten Beziehungen und genutzten Lösungsstrategien tatsächlich ernst genommen wird und sich Lehrkräfte nicht damit zufrieden zeigen, wenn die Zahlenmauern korrekt ausgefüllt sind. Die arithmetisch korrekte Lösung kann z.B. bei den Zahlenmauern in Abb. 7 leicht gelingen, auch ohne dass die eigentlich zentrale Auseinandersetzung mit den Beziehungen und Zusammenhängen zwischen den Aufgaben vorgenommen wird.

Damit ist eigentlich weniger die Aufgabe an sich „gut“; sie trägt vielmehr ein Potenzial in sich, in einem entsprechenden Unterricht zu einer „guten Aufgabe“ zu werden. In ähnlicher Weise formulieren dies Büchter und Leuders und betonen so die enge Verbindung zwischen Aufgabe und Unterricht sowie die Relevanz einer geeigneten Aufgaben- und Unterrichtskultur.

„Gute Mathematikaufgaben alleine sind jedoch noch keine Garantie für einen guten Mathematikunterricht. Das Potenzial, das in einer Aufgabe steckt, kann durch einen falschen Einsatz zunichte gemacht werden. Umgekehrt ist ein guter Unterricht aber darauf angewiesen [...] über geeignete Aufgaben zu verfügen.“ (Büchter & Leuders, 2005, S. 13f.)

Ein Unterricht, der darauf abzielt, nicht die rechnerische Lösung von Aufgaben in den Mittelpunkt zu stellen, sondern die mathematischen Strukturen sowie die individuellen Vorgehensweisen und Strategien der Schüler*innen, trägt gleichzeitig auch zur Förderung prozessbezogener Kompetenzen bei. Geeignete Fragen und Impulse richten den Blick auf die Lösungs- und Bearbeitungsprozesse. Bei der eingangs dargestellten Beispielaufgabe „Mache 12 Aufgaben, bei denen die Antwort immer 10 ist!“ (vgl. Abb. 1 unten) wären sinnvolle Fragen und Impulse beispielweise: „Wie bist du vorgegangen?“, „Sortiere deine Aufgaben so, dass die anderen gut erkennen können, wie du vorgegangen bist.“, „Erkläre: Warum gibt es mehr passende Minus-Aufgaben als Plus-Aufgaben?“

Ein in der Mathematikdidaktik verbreiteter Ansatz für die unterrichtliche Umsetzung von und Arbeit mit „guten Aufgaben“ stellt die Arbeit mit Lernumgebungen dar.

3.1 Das Konzept der Lernumgebungen im Mathematikunterricht

Lernumgebungen können als „große gerahmte Aufgabenfelder“ (Wollring, 2009, S. 12) betrachtet werden. Sie nutzen Aufgaben und Aufgabenformate, die eine gewisse Flexibilität in Bezug auf Schwierigkeitsgrade, Bearbeitungsumfang und -tiefe sowie auf unterschiedliche kindliche Lösungswege aufweisen.

„Eine Lernumgebung [...] ist im gewissen Sinne eine natürliche Erweiterung dessen, was man im Mathematikunterricht traditionell eine ‚gute bzw. eine substanzielle Aufgabe‘ nennt. [...] Eine Lernumgebung ist eine flexible große Aufgabe. Sie besteht in der Regel aus mehreren Teilaufgaben und Arbeitsanweisungen, die durch bestimmte Leitgedanken – immer basierend auf einer innermathematischen oder sachbezogenen Struktur – zusammengebunden sind. Der Terminus beschreibt als Erweiterung des üblichen Begriffs ‚Aufgabe‘ somit im Wesentlichen eine Unterrichtssituation mit Zielen, Inhalten und Vorgehensweisen bzw. Tätigkeiten der Lehrperson wie auch der Schülerinnen und Schüler.“ (Hirt & Wälti, 2008, S. 13)

Lernumgebungen, häufig auch als *substanzielle Lernumgebungen* (Wittmann, 1998) bezeichnet, stellen somit ein Bindeglied zwischen der Aufgabe und dem Unterricht dar. Sie nutzen „gute“ Aufgaben und entwickeln an ihnen eine Aufgaben- und Unterrichtskultur, die sich an der Förderung prozessbezogener Kompetenzen orientiert.

3.2 Merkmale von Lernumgebungen

In einem Grundlagenaufsatz zu dem Konzept der Lernumgebungen in der Mathematikdidaktik formulierte Wittmann vor rund 25 Jahren vier Merkmale, die die Qualität von Lernumgebungen prägen.

„Lernumgebungen bester Qualität, sogenannte substantielle Lernumgebungen, müssen folgenden Kriterien genügen:

- Sie müssen *zentrale Ziele, Inhalte und Prinzipien* des Mathematikunterrichts repräsentieren.
- Sie müssen reiche Möglichkeiten für *mathematische Aktivitäten* von Schülerinnen bieten.
- Sie müssen *flexibel* sein und leicht an die speziellen Gegebenheiten einer bestimmten Klasse *angepaßt* werden können.
- Sie müssen *mathematische, psychologische und pädagogische Aspekte* des Lehrens und Lernens in einer ganzheitlichen Weise integrieren und daher ein weites Potential für empirische Forschungen bieten.“ (Wittmann, 1998, S. 337f.; Hervorh. T.R.)

Qualitativ hochwertige Lernumgebungen für den Mathematikunterricht befassen sich mit einem mathematisch substanziellen Thema wie z.B. dem bereits vorgestellten Übungsformat Zahlenmauern. Inhaltlich wird bei diesem Beispiel nicht nur die Addition, sondern auch die Subtraktion (durch ein Lösen der Zahlenmauer in Abb. 6 „von oben nach unten“) geübt. Die Schüler*innen können bei diesem Übungsformat eigenständige mathematische Entdeckungen machen, z.B. welchen Einfluss die unterschiedlichen Steine aus der unteren Schicht auf den Deckstein in der oberen Schicht haben. Die unterschiedlichen Aufgabentypen zu Zahlenmauern in den Abbildungen 4, 6 und 7 veranschaulichen zudem beispielhaft Möglichkeiten für eine flexible Anpassung des Formats an die Lernvoraussetzungen der Schüler*innen.

Über die Auseinandersetzung mit einzelnen inhaltsbezogenen Kompetenzen (KMK, 2022) hinaus sollten Lernumgebungen Lernenden die Gelegenheit bieten, zentrale Prinzipien des Fachs zu erfassen. Besonders bedeutsam ist dabei die Orientierung an Mustern und Strukturen, welche als zentrales Grundprinzip der Mathematik (als Wissenschaft der Muster und Strukturen; Wittmann & Müller, 2007) angesehen werden kann.

Grundlegend für die Arbeit mit (substanziellen) Lernumgebungen ist eine konstruktivistische Sicht auf das Lernen als aktiven Konstruktionsprozess. Lernumgebungen sind durch ihre Orientierung an aktiv entdeckendem und sozialem Lernen gekennzeichnet. Sie zeichnen sich u.a. dadurch aus, dass sie den Schüler*innen vielfältige Gelegenheiten für ein selbstständiges und aktives Mathematiktreiben auf einem individuell angemessenen Niveau ermöglichen (Hirt & Wälti, 2008; Krauthausen, 2018; Peter-Koop et al., 2009; Wittmann, 1998; Wollring, 2009).

4 Umgang mit Heterogenität

Es gibt seit vielen Jahren zahlreiche wissenschaftliche Belege für eine große Heterogenität der mathematischen Kompetenzen von Schüler*innen bereits zu Schulbeginn (Benz et al., 2015; Schipper et al., 2015). Durch die Umsetzung der Inklusion hat sich die Spanne der mathematischen Leistungen in der Grundschule tendenziell weiter vergrößert. An Schule allgemein und natürlich auch an den Mathematikunterricht muss somit der Anspruch gestellt werden, dieser Heterogenität u.a. auch durch die angemessene Gestaltung von Aufgaben und Lernangeboten zu begegnen. Gerade das Konzept der Lernumgebungen ist hier in besonderer Weise geeignet und zielt durch die geforderte Flexibilität darauf ab, sämtlichen Schüler*innen einen Zugang zur Lernumgebung zu ermöglichen und Lerngelegenheiten für alle Schüler*innen auf unterschiedlichen Niveaus zu bieten. Die Berücksichtigung unterschiedlicher Zugänge und Niveaus ist in

„guten Aufgaben“ und substanziellen Lernumgebungen immer als zentrales Prinzip enthalten.

Damit wird deutlich, dass die Berücksichtigung von Heterogenität in enger Verbindung zur Differenzierung steht und Ansätzen der Differenzierung in heterogenen Lerngruppen eine große Bedeutung zukommt.

„Das ‚Problem der Differenzierung‘ scheint sich aufgrund der zunehmenden Heterogenität sogar noch weiter zuzuspitzen und somit eines der Hauptprobleme des heutigen Mathematikunterrichts vom ersten Schuljahr an zu sein bzw. zu werden – natürlich auch angesichts der aktuellen schulpolitischen Forderung nach der Umsetzung des Inklusionskonzepts.“ (Käpnick & Benölken, 2020, S. 216)

Im Kontext von Lernumgebungen für den Mathematikunterricht kommt besonders der *Differenzierung mit Aufgaben* eine entscheidende Bedeutung zu. Leuders und Philipp (2015, S. 134) unterscheiden in diesem Zusammenhang verschiedene Differenzierungsstrategien, welche u.a. *gestufte Aufgaben* sowie *selbstdifferenzierende Aufgaben* nutzen.¹

4.1 Differenzierung mit gestuften Aufgaben

In der ersten Fassung der Bildungsstandards für den Primarbereich im Fach Mathematik (KMK, 2005) finden sich im hinteren Teil verschiedene Aufgabenbeispiele, die von den Verfasser*innen als „große Aufgaben“ bezeichnet werden. Diese sollen „der Leistungsheterogenität von Grundschulern dadurch Rechnung tragen, dass sie im gleichen inhaltlichen Kontext ein breites Spektrum an unterschiedlichen Anforderungen und Schwierigkeiten abdecken“ (KMK, 2005, S. 13). Die unterschiedlichen Anforderungen beziehen sich dabei vor allem auf die in den Bildungsstandards beschriebenen Anforderungsbereiche *Reproduzieren* (AB I), *Zusammenhänge herstellen* (AB II) sowie *Verallgemeinern und Reflektieren* (AB III; vgl. KMK, 2005, S. 13).

Bei diesen sogenannten „großen Aufgaben“ handelt es sich um *gestufte Aufgaben*, welche Teilaufgaben in unterschiedlichen Niveaus enthalten. Die zentrale Grundidee von gestuften Aufgaben besteht darin, dass zu einem Inhalt zunächst einfache Einstiegsaufgaben gestellt werden. Weitere Aufgaben zu demselben Inhalt werden dann zunehmend anspruchsvoller und erfordern weitere Kompetenzen zur Bearbeitung (Leuders & Philipp, 2015). Solche gestuften Aufgaben können als ein Beispiel für einen differenzierenden Unterricht betrachtet werden, „in dem alle Kinder am gleichen Inhalt arbeiten, aber nicht unbedingt dieselben Aufgaben lösen.“ (KMK, 2005, S. 13)

Gestufte Aufgaben finden sich recht häufig in Unterrichtsmaterialien wieder, wie das Beispiel in Abbildung 8 auf der folgenden Seite aus einem aktuellen Schulbuch verdeutlicht. Sämtliche Teilaufgaben beziehen sich mit der Summenbildung in Ausschnitten an der Hundertertafel auf denselben inhaltlichen Kontext. Die erste Teilaufgabe erfordert als vergleichsweise einfache Einstiegsaufgabe ausschließlich die Addition der Zahlen in den vorgegebenen Ausschnitten. Die weiteren Aufgaben verlangen dann z.B. das Vergleichen und Verändern unterschiedlicher Ausschnitte sowie Erklärungen zu festgestellten Entdeckungen und damit ein Herstellen von Zusammenhängen sowie ein Verallgemeinern und Reflektieren.

¹ Zusätzlich führen Leuders und Philipp (2015, S. 34) zwei weitere Strategien zur Differenzierung mit Aufgaben auf, nämlich die Verwendung von paralleldifferenzierenden Aufgaben sowie von Aufgaben mit gestuften/adaptiven Hilfen. Da den gestuften sowie den selbstdifferenzierenden Aufgaben bei der Entwicklung von Unterrichtsmaterialien z.B. in Schulbüchern eine besondere Bedeutung zukommt, beschränken sich die Darstellungen im vorliegenden Beitrag auf die beiden letztgenannten Differenzierungsstrategien.

1 Addiere die Zahlen in den Zahlen-Dreieern.

a)

15	16	17
----	----	----

 c)

4
14
24

 d)

17
27
37

b)

24	25	26
----	----	----

2 Welche Zahlen fehlen?
Addiert die Zahlen in den Zahlen-Dreieern. Was fällt euch auf? Erklärt.

a)

	12	
--	----	--

 und

12

 b)

	23	
--	----	--

 und

23

3 a) Verschiebt die Zahlen-Dreier aus Aufgabe 2 um ein Feld nach rechts. Wie verändert sich die Summe? Erklärt.
b) Verschiebt die Zahlen-Dreier aus Aufgabe 2 um ein Feld nach unten. Wie verändert sich die Summe? Erklärt.

4 Findet Zahlen-Dreier mit der Summe 45.

5 Diese Ausschnitte aus der Hundertertafel haben die Summe 45. Findet sie.

a)

--	--

 b)

 c)

 d)

e) Findet weitere Ausschnitte mit der Summe 45.

Abbildung 8: Differenzierung am Beispiel der Lernumgebung „Addieren in der Hundertertafel“ aus dem Schulbuch *Welt der Zahl, 2. Schuljahr* (2020, S. 86)

4.2 Natürliche Differenzierung und selbstdifferenzierende Aufgaben

Ein weiterer Ansatz zur Differenzierung mit Aufgaben, dem in der Mathematikdidaktik große Bedeutung zukommt, ist die „Natürliche Differenzierung“, welche auf der Verwendung von selbstdifferenzierenden Aufgaben aufbaut (Krauthausen, 2018; Krauthausen & Scherer, 2014; Leuders & Philipp, 2015). Der Begriff der natürlichen Differenzierung geht auf Wittmann (1994) zurück und steht in enger Verbindung zum Ansatz des aktiv-entdeckenden Lernens.

Zentrales Merkmal dieses Differenzierungsansatzes ist es, dass bewusst nicht mit unterschiedlichen Aufgaben für unterschiedliche Lernende gearbeitet wird, sondern dass alle Lernenden dieselbe Aufgabe bzw. das gleiche Lernangebot erhalten. Die Differenzierung geschieht dann quasi auf natürlichem Weg: Die Lernenden bearbeiten dieselbe Aufgabe, aber auf einem individuell unterschiedlichen Niveau (unterschiedliches „Level der Bearbeitung“; Krauthausen, 2018, S. 301), nutzen unterschiedliche Lösungswege, Hilfsmittel und Darstellungsweisen. Die Differenzierung wird daher nicht durch die Lehrkraft vorgenommen (z.B. durch eine Zuweisung von unterschiedlichen Aufgaben an unterschiedliche Lernende), sondern ergibt sich von selbst aus den individuellen Bearbeitungen der Kinder, die sich im Bearbeitungsumfang und in der Bearbeitungstiefe unterscheiden.

Damit eine solche selbstdifferenzierte Bearbeitung einer Aufgabe möglich ist, muss das Lernangebot bestimmte Bedingungen erfüllen. Wichtig ist eine *inhaltliche Ganzheitlichkeit* des Lernangebots, ohne das Lernangebot kleinschrittig didaktisch aufzubereiten (vgl. Krauthausen & Scherer, 2014, S. 50). Ebenfalls bedeutsam ist eine *gewisse Komplexität* des Lernangebots, um die Bearbeitung auf unterschiedlichem Niveau zu ermöglichen. Mit den unterschiedlichen Bearbeitungsniveaus sind automatisch *Freiheitsgrade*

der Lernenden bei der Bearbeitung verbunden, indem sie z.B. selbstständig bestimmen, in welchem Umfang und in welcher Tiefe sie eine Aufgabe bearbeiten. Zusätzlich wird die große Bedeutung des *sozialen Von- und Miteinander-Lernens* betont (vgl. Krauthausen & Scherer, 2014, S. 51).

Ein Beispiel für eine selbstdifferenzierende Aufgabe findet sich ebenfalls in Abbildung 8. Die Aufgabe „Finde weitere Ausschnitte mit der Summe 45.“ (Aufg. 5e) kann in sehr unterschiedlicher Tiefe und auf unterschiedlichen Wegen bearbeitet werden: Schüler*innen können einen einzigen weiteren Ausschnitt oder viele weitere Lösungen (bei insgesamt über 20 passenden Ausschnitten) finden; sie können dabei unterschiedliche Strategien entwickeln (z.B. systematisches Verschieben eines Ausschnitts und „Anhängen“ von zusätzlichen Zahlenfeldern) und unterschiedliche Hilfsmittel (z.B. eine vollständig mit Zahlen beschriftete Hundertertafel oder einen Taschenrechner bei rechnerischen Schwierigkeiten) nutzen. Wichtig ist dabei, dass sich alle Schüler*innen unabhängig von ihren individuellen mathematischen Kompetenzen gewinnbringend mit demselben Lernangebot auseinandersetzen können.

Wie das Schulbuchbeispiel in Abbildung 8 zeigt, können die beiden Differenzierungsstrategien *Differenzierung mit gestuften Aufgaben* und *natürliche Differenzierung* auch sinnvoll miteinander verbunden werden. An die von ihrer Schwierigkeit her gestuften Teilaufgaben (Aufg. 1 bis 5d in Abb. 8) schließt sich im selben inhaltlichen Kontext eine selbstdifferenzierende Aufgabe (Aufg. 5e in Abb. 8) an.

5 Abschließende Bemerkungen

Aufgaben besitzen als ein prägendes Element des Mathematikunterrichts eine zentrale Bedeutung für die Qualität des Unterrichts. „Gute Aufgaben“ und (substanzielle) Lernumgebungen stellen eine wichtige Basis für einen kompetenzorientierten und heterogenitätssensiblen Mathematikunterricht dar und können damit als eine notwendige Voraussetzung für einen qualitativ guten Unterricht angesehen werden.

Hinreichend für guten Unterricht sind „gute Aufgaben“ jedoch nicht. „Gute Aufgaben“ tragen ein hohes Potenzial in sich, guten Unterricht zu ermöglichen. Lehrkräfte benötigen jedoch einen Blick für diese Potenziale und für Möglichkeiten der Differenzierung. Sie müssen ihren Schüler*innen im Unterricht die Gelegenheit geben, sich selbstständig und aktiv-entdeckend mit Aufgaben auseinanderzusetzen, diese auf einem angemessenen Niveau und auf individuell passenden Wegen zu bearbeiten, und den unterrichtlichen Austausch über die Aufgaben und vor allem über die Bearbeitungen anregen. Erst durch eine angemessene Aufgaben- und Unterrichtskultur kann es gelingen, mit „guten Aufgaben“ auch guten Unterricht zu gestalten.

Literatur und Internetquellen

Schulbücher

Die Welt der Zahl – Heft 1. (1949). Hrsg. v. A. Kruckenberg. Schroedel.

Welt der Zahl, 2. Schuljahr. (1998). Hrsg. v. H.-D. Rinkens & K. Hönisch. Schroedel.

Welt der Zahl, 2. Schuljahr. (2020). Hrsg. v. T. Rottmann & G. Träger. Westermann.

Weiterführende Literatur und Internetquellen

Benz, C., Peter-Koop, A. & Grüßing, M. (2015). *Frühe mathematische Bildung. Mathematiklernen der Drei- bis Achtjährigen.* Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-8274-2633-8>

Büchter, A. & Leuders, T. (2005). *Mathematikaufgaben selbst entwickeln.* Cornelsen.

Hirt, U. & Wälti, B. (2008). *Lernumgebungen im Mathematikunterricht – Natürliche Differenzierung für Rechenschwache bis Hochbegabte.* Klett Kallmeyer.

- Käpnick, F. & Benölken, R. (2020). *Mathematiklernen in der Grundschule* (2., neu bearb. Aufl.). Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-60872-2>
- KMK (Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland). (2005). *Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Primarbereich. Beschluss vom 15.10.2004*. Luchterhand.
- KMK (Sekretariat der Ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland). (2022). *Bildungsstandards für das Fach Mathematik Primarbereich. Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004 i.d.F. vom 23.06.2022*. KMK.
- Krauthausen, G. (2018). *Einführung in die Mathematikdidaktik – Grundschule* (4., neu bearb. Aufl.). Springer Spektrum. <https://doi.org/10.1007/978-3-662-54692-5>
- Krauthausen, G. & Scherer, P. (2014). *Natürliche Differenzierung im Mathematikunterricht*. Klett Kallmeyer.
- Leuders, T. & Philipp, K. (2015). Differenzierung. In J. Leuders & K. Philipp (Hrsg.), *Mathematik – Didaktik für die Grundschule* (S. 130–147). Cornelsen.
- Peter-Koop, A., Lilitakis, G. & Spindeler, B. (Hrsg.). (2009). *Lernumgebungen – Ein Weg zum kompetenzorientierten Mathematikunterricht in der Grundschule*. Mildenerger.
- Ruwisch, S. (2003). Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule – Einführung. In S. Ruwisch & A. Peter-Koop (Hrsg.), *Gute Aufgaben im Mathematikunterricht der Grundschule* (S. 5–14). Mildenerger.
- Schipper, W., Ebeling, A. & Dröge, R. (2015). *Handbuch für den Mathematikunterricht – 1. Schuljahr*. Schroedel.
- Ulm, V. (Hrsg.). (2008). *Gute Aufgaben Mathematik*. Cornelsen.
- Walther, G. (2004). *Gute Aufgaben. Modul 1 – SINUS Transfer Grundschule*. IPN.
- Walther, G., Selter, C. & Neubrand, J. (2007). Die Bildungsstandards Mathematik. In G. Walther, M. van den Heuvel-Panhuizen, D. Granzer & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret* (S. 16–41). Cornelsen Scriptor.
- Wittmann, E.C. (1994). Wider die Flut der „bunten Hunde“ und der „grauen Päckchen“: Die Konzeption des aktiv-entdeckenden Lernens und des produktiven Übens. In E.C. Wittmann & G. Müller (1994), *Handbuch produktiver Rechenübungen, Band 1: Vom Einspluseins zum Einmaleins* (S. 157–171). Klett.
- Wittmann, E.C. (1998). Design und Erforschung von Lernumgebungen als Kern der Mathematikdidaktik. *Beiträge zur Lehrerbildung*, 16 (3), 329–342. <https://doi.org/10.36950/bzl.16.3.1998.10386>
- Wittmann, E.C. & Müller, G. (1994). *Handbuch produktiver Rechenübungen, Band 1: Vom Einspluseins zum Einmaleins* (2., überarb. Aufl.). Klett.
- Wittmann, E.C. & Müller, N. (2007). Muster und Strukturen als fachliches Grundkonzept. In G. Walther, M. van den Heuvel-Panhuizen, D. Granzer & O. Köller (Hrsg.), *Bildungsstandards für die Grundschule: Mathematik konkret* (S. 42–65). Cornelsen Scriptor.
- Wollring, B. (2009). Zur Kennzeichnung von Lernumgebungen für den Mathematikunterricht der Grundschule. In A. Peter-Koop, G. Lilitakis & B. Spindeler (Hrsg.), *Lernumgebungen – Ein Weg zum kompetenzorientierten Mathematikunterricht in der Grundschule* (S. 9–23). Mildenerger.

Beitragsinformationen

Zitationshinweis:

Rottmann, T. (2024). Lernumgebungen und „gute Aufgaben“ im Mathematikunterricht der Grundschule. Möglichkeiten der Differenzierung mit Aufgaben im heterogenitätssensiblen Unterricht. *PFLB – Praxis-ForschungLehrer*innenBildung*, 6 (3), 5–16. <https://doi.org/10.11576/pflb-7081>

Online verfügbar: 23.05.2024

ISSN: 2629-5628



Dieses Werk ist freigegeben unter der Creative-Commons-Lizenz CC BY-SA 4.0 (Weitergabe unter gleichen Bedingungen). Diese Lizenz gilt nur für das Originalmaterial. Alle gekennzeichneten Fremdinhalte (z.B. Abbildungen, Fotos, Tabellen, Zitate etc.) sind von der CC-Lizenz ausgenommen. Für deren Wiederverwendung ist es ggf. erforderlich, weitere Nutzungsgenehmigungen beim jeweiligen Rechteinhaber einzuholen. <https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/de/legalcode>