PFLB
PraxisForschungLehrer*innenBildung
Zeitschrift für Schul- und Professionsentwicklung

Online-Supplement

Aktivität von Radionuklidgemischen – Ein Konzept zur Entwicklung eines mathematischen Modells

Online-Supplement 2: Zusammenhang zwischen Zerfallskonstante λ und Würfelwahrscheinlichkeit p

Tobias Allmers[1,*]

[1] *Kreisgymnasium St. Ursula Haselünne*
[*] *Kontakt: Kreisgymnasium St. Ursula Haselünne*
tobias.allmers@kgsuhaseluenne.de

Zitationshinweis:
Allmers, T. (2021). Aktivität von Radionuklidgemischen – Ein Konzept zur Entwicklung eines mathematischen Modells [Online-Supplement 2: Zusammenhang zwischen Zerfallskonstante λ und Würfelwahrscheinlichkeit p]. *PFLB – PraxisForschungLehrer*innenBildung, 3* (1), 221–242. https://doi.org/10.11576/pflb-4844

Online verfügbar: 08.11.2021

ISSN: 2629–5598

Hinweis: Lösungen sind ausführlich zu dokumentieren! Lösungssätze sind in geeigneter Form anzugeben.
Mit Würfeln wird der Zerfall von instabilen Nukliden simuliert. Für einen Zerfallsprozess sind die Zerfallskonstante λ bzw. die Halbwertszeit t_{H} charakteristische Größen. Für die Würfelsimulation ist allerdings nur die Wahrscheinlichkeit p für das Auftreten eines Würfelereignisses von Würfelwurf zu Würfelwurf bekannt. Im Folgenden soll der Zusammenhang zwischen p und den Größen λ hergestellt werden.

Bestimmung der Zerfallskonstanten λ aus der Würfelwahrscheinlichkeit p

Im Folgenden soll der Zusammenhang

$$\lambda = -\ln(1-p)$$

über die Exponentialfunktion

$$f(x) = a \cdot b^x.$$

hergeleitet werden.

Aufgabe:

a) Verwenden Sie für die oben genannte Exponentialfunktion im Kontext eines radioaktiven Zerfalls geeignete Abkürzungen zur Berechnung der Anzahl N nicht-umgewandelter Kerne zum Zeitpunkt t.

<u>mögliches Ergebnis:</u>

$$N(t) = N_0 \cdot b^t$$

mit N_0 als Anzahl der Würfel zu Beginn der Würfelsimulation.

b) Die Basis b der Exponentialfunktion soll so umgeschrieben werden, dass sie die Wahrscheinlichkeit p enthält. Bedenken Sie, dass die gesuchte Basis den Anteil der Kerne angibt, der nach einem Zeitschritt noch vorhanden ist.

<u>mögliches Ergebnis:</u> Vorüberlegung:

Ausgehend von der Würfelsimulation ist klar, dass für $p = 1/6$ nach einem Würfelschritt noch

$$N(1) = N_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)$$

Würfel von ursprünglich N_0 Würfeln vorhanden sind. Nach zwei Würfelschritten sind noch

$$\begin{aligned} N(2) &= N(1) \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right) \\ &= N(0) \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^2. \end{aligned}$$

Würfel vorhanden.

Für den k-ten Würfelschritt gilt für die Anzahl noch vorhandener Würfel

$$N(k) = N_0 \cdot \left(1 - \frac{1}{6}\right)^k.$$

Für die Zeit t gilt somit allgemein

$$N(t) = N_0 \cdot (1-p)^t.$$

<u>Ergebnis:</u> Für die Basis b gilt $b = 1 - p$.

c) Das Zerfallsgesetz

$$N(t) = N_0 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot t}$$

beinhaltet die Zerfallskonstante λ. Führen Sie einen Basiswechsel $(1-p) \to \mathrm{e}$ für den von Ihnen gefundenen Zusammenhang

$$N(t) = N_0 \cdot (1-p)^t$$

durch. Ermitteln Sie sodann durch den Vergleich mit dem Zerfallsgesetz den Zusammenhang zwischen λ und p.

<ins>mögliches Ergebnis:</ins>

Wird ein Basiswechsel von $(1-p)$ zu e über

$$\begin{aligned} N(t) &= N_0 \cdot (1-p)^t \\ &= N_0 \mathrm{e}^{\ln(1-p) \cdot t} \end{aligned}$$

durchgeführt, liefert der Vergleich zum Zerfallsgesetz $N(t) = N_0 \mathrm{e}^{-\lambda \cdot t}$ den Zusammenhang

$$\lambda = -\ln(1-p).$$