PFLB
PraxisForschungLehrer*innenBildung
Zeitschrift für Schul- und Professionsentwicklung

Online-Supplement

Aktivität von Radionuklidgemischen – Ein Konzept zur Entwicklung eines mathematischen Modells

Online-Supplement 1b: Simulation zur zeitlichen Entwicklung der Aktivität

Tobias Allmers[1,*]

[1] *Kreisgymnasium St. Ursula Haselünne*
[*] *Kontakt: Kreisgymnasium St. Ursula Haselünne*
tobias.allmers@kgsuhaseluenne.de

Zitationshinweis:
Allmers, T. (2021). Aktivität von Radionuklidgemischen – Ein Konzept zur Entwicklung eines mathematischen Modells [Online-Supplement 1b: Simulation zur zeitlichen Entwicklung der Aktivität]. *PFLB – PraxisForschungLehrer*innenBildung, 3* (1), 221–242. https://doi.org/10.11576/pflb-4844

Online verfügbar: 08.11.2021

ISSN: 2629–5598

Hinweis: Lösungen sind ausführlich zu dokumentieren! Lösungssätze sind in geeigneter Form anzugeben.
Die Aktivität eines radioaktiven Stoffes gibt die Anzahl der Kernumwandlungen pro Zeiteinheit an. Sind N_1 und N_2 die Anzahl der Kerne zum Zeitpunkt t_1 bzw. t_2 mit $t_2 > t_1$, so ist die Aktivität A gegeben durch

$$\begin{aligned} A &= -\frac{N_2 - N_1}{t_2 - t_1} \\ &= -\frac{\Delta N}{\Delta t}. \end{aligned} \tag{1}$$

Aufgabe 6: Erläutern Sie, wie sich aufgrund dieser Festlegung nur positive Werte für die Aktivität ergeben.

> möglicher Lösung: Die Differenz ΔN ist aufgrund des Zerfalls für $t_2 > t_1$ negativ. Das Minuszeichen vor der Differenz sorgt dafür, dass die Aktivität immer einen positiven Wert annimmt.

Die momentane Aktivität $A(t)$ ergibt sich für sehr kleine Zeitabschnitte $\Delta t \to 0$ und entspricht der momentanen Änderung der Kernanzahl des betrachteten Isotops. Es gilt:

$$\begin{aligned} A(t) &= \lim_{\Delta t \to 0} \left(-\frac{\Delta N}{\Delta t} \right) \\ &= -\dot{N}(t). \end{aligned}$$

Mit dem Zerfallsgesetz

$$N(t) = N_0 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot t}$$

ergibt sich

$$A(t) = \lambda \cdot N(t). \tag{2}$$

Aufgabe 7: Führen Sie die Ableitung von $N(t)$ nach der Zeit t durch und bestätigen Sie damit die Richtigkeit für $A(t) = \lambda \cdot N(t)$.

> mögliche Lösung & Hinweis:
> Aufgrund der Differentialrechnung und der Eulerschen Zahl ist diese Aufgabe eventuell erst ab der Qualifikationsphase geeignet.

$$\begin{aligned} A(t) &= -\dot{N}(t) \\ &= -\frac{\mathrm{d}N(t)}{\mathrm{d}t} \\ &= -\frac{\mathrm{d}N_0 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot t}}{\mathrm{d}t} \\ &= -(-\lambda) \cdot N_0 \cdot \mathrm{e}^{-\lambda \cdot t} \\ &= \lambda \cdot N(t) \end{aligned}$$

In der Würfelsimulation werden die Zeitschritte Δt durch Würfelschritte Δk abgebildet.

Aufgabe 8: Schreiben Sie die Gleichung (1) und (2) für die Aktivität entsprechend um. Achten Sie darauf, dass die Gleichungen für eine spätere Anwendung in einer numerischen Simulation auch nicht ganzzahlige Würfeldurchgänge berücksichtigen sollen.

> mögliches Ergebnis: Umschreiben der Gleichung (1)

$$A = -\frac{N_{k+\Delta k} - N_k}{\Delta k}.$$

mit $\Delta k \in \mathbb{R}^+$, da auch nicht-ganzzahlige Würfelschritte in den Berechnungen möglich sind.

mögliches Ergebnis: Umschreiben der Gleichung (2)

$$A(k) = \lambda \cdot N_k$$

Um die Anzahl nicht umgewandelter Kerne über die Zerfallskonstante λ für einen Würfelschritt Δk berechnen zu können, werden die umgeformten Gleichungen gleichgesetzt.

Aufgabe 9:

a) Zeigen Sie, dass die Anzahl der „instabilen“ Würfel nach einem Würfelschritt Δk durch

$$N_{k+\Delta k} = N_k - \lambda \cdot N_k \cdot \Delta k \qquad (3)$$

beschrieben werden kann. Dabei ist $N(k) = N_k$

mögliche Lösung:

$$\begin{aligned} A &= A(k) \\ -\frac{N_{k+\Delta k} - N_k}{\Delta k} &= \lambda \cdot N(k) \\ -(N_{k+\Delta k} - N_k) &= \lambda \cdot N(k) \cdot \Delta k \\ -N_{k+\Delta k} + N_k &= \lambda \cdot N_k \cdot \Delta k \\ -N_{k+\Delta k} &= \lambda \cdot N_k \cdot \Delta k - N_k \\ N_{k+\Delta k} &= -\lambda \cdot N_k \cdot \Delta k + N_k \\ N_{k+\Delta k} &= N_k - \lambda \cdot N_k \cdot \Delta k. \end{aligned}$$

b) Erläutern Sie, inwiefern es sich bei Gleichung (3) um eine Näherung handelt.

mögliche Lösung: Bei Gleichung (3) handelt es sich um eine Näherung, da die durchschnittliche Aktivität mit der momentanen Aktivität gleichgesetzt wird. Hinweis: Im Unterrichtsgespräch sollte thematisiert werden, dass für hinreichend kleine Schritte von Δk die Näherung beliebig gut ist.

Die Gleichung (3) ist eine Differenzengleichung, mit der der Bestand an Repräsentanten der instabilen Kerne berechnet werden kann. Zwischen der Wahrscheinlichkeit p für die Umwandlung eines Kerns und der Zerfallskonstante λ besteht der Zusammenhang

$$\lambda = -\ln(1-p).$$

Insgesamt ergibt sich über

$$N_{k+\Delta k} = N_k + \ln(1-p) \cdot N_k \cdot \Delta k \quad (4)$$

die Möglichkeit zur rekursiven Berechnung des Bestands an instabilen Kernen.
Über die Gleichung (1) kann mit Hilfe von Gleichung (4) die Anzahl der pro Würfelschritt Δk entfernten Würfel über die Wahrscheinlichkeit p ausgedrückt werden.

Aufgabe 10:

a) Erläutern Sie, inwiefern die Anzahl der pro Würfelschritte Δk entfernten Würfel als eine Analogie für die Aktivität einer radioaktiven Substanz betrachtet werden kann.

mögliches Ergebnis: Die Würfel werden aus der Simulation entfernt, sobald sich ein bestimmtes Würfelergebnis einstellt und die Würfel ausgetauscht werden. Jeder ausgetauschte Würfel entspricht damit einer Kernumwandlung und geht damit in die Aktivität der simulierten instabilen Mutternuklide ein.

b) Zeigen Sie, dass die Aktivität mit den Gleichungen (1) und (4) durch

$$A = -\ln(1-p)\cdot N_k \qquad (5)$$

berechnet werden kann.

mögliches Ergebnis:

$$\begin{aligned} A &= -\frac{N_{k+\Delta k}-N_k}{\Delta k} \\ &= -\frac{N_k-\lambda\cdot N_k\Delta k-N_k}{\Delta k} \\ &= -\frac{-\lambda\cdot N_k\cdot\Delta k}{\Delta k} \\ &= \lambda\cdot N_k \\ &= -\ln(1-p)\cdot N_k \end{aligned}$$

Hinweis: Hier ergibt sich ein Ergebnis, dass mit $\lambda = -\ln(1-p)$ äquivalent zum Ergebnis aus Aufgabe 7 ist, aber ohne Differentialrechnung gefunden werden kann.

Mit Hilfe von Gleichung (4) lässt sich der Bestand $N_{\mathrm{M},k}$ eines Mutternuklids beschreiben, welches mit einer Wahrscheinlichkeit von p_M von Würfelschritt k zu Würfelschritt $k+\Delta k$ zerfällt.

Aufgabe 11:

a) Stellen Sie mit Hilfe Ihrer Erkenntnisse aus der Simulation aus Aufgabe 2 des vorherigen Arbeitsblattes eine Differenzengleichung auf, mit der sich die Zunahme des stabilen Endprodukts beschreiben lässt.

Vorüberlegung:

- Anzahl der Nuklide des Endprodukts ist $N_{\mathrm{E},k}$.
- Im Zeitraum Δk zerfallen

$$\lambda_\mathrm{M}\cdot N_{\mathrm{M},k}\cdot\Delta k = -\ln(1-p_\mathrm{M})\cdot N_{\mathrm{M},k}\cdot\Delta k$$

Mutternuklide. Diese müssen zu der vorangegangenen Anzahl der Kerne *hinzugezählt* werden.

Differenzengleichung:

$$\begin{aligned} N_{\mathrm{E},k+\Delta k} &= N_{\mathrm{E},k} + \lambda_\mathrm{M}\cdot N_{\mathrm{M},k}\cdot\Delta k \\ &= N_{\mathrm{E},k} - \ln(1-p_\mathrm{M})\cdot N_{\mathrm{M},k}\cdot\Delta k. \end{aligned}$$

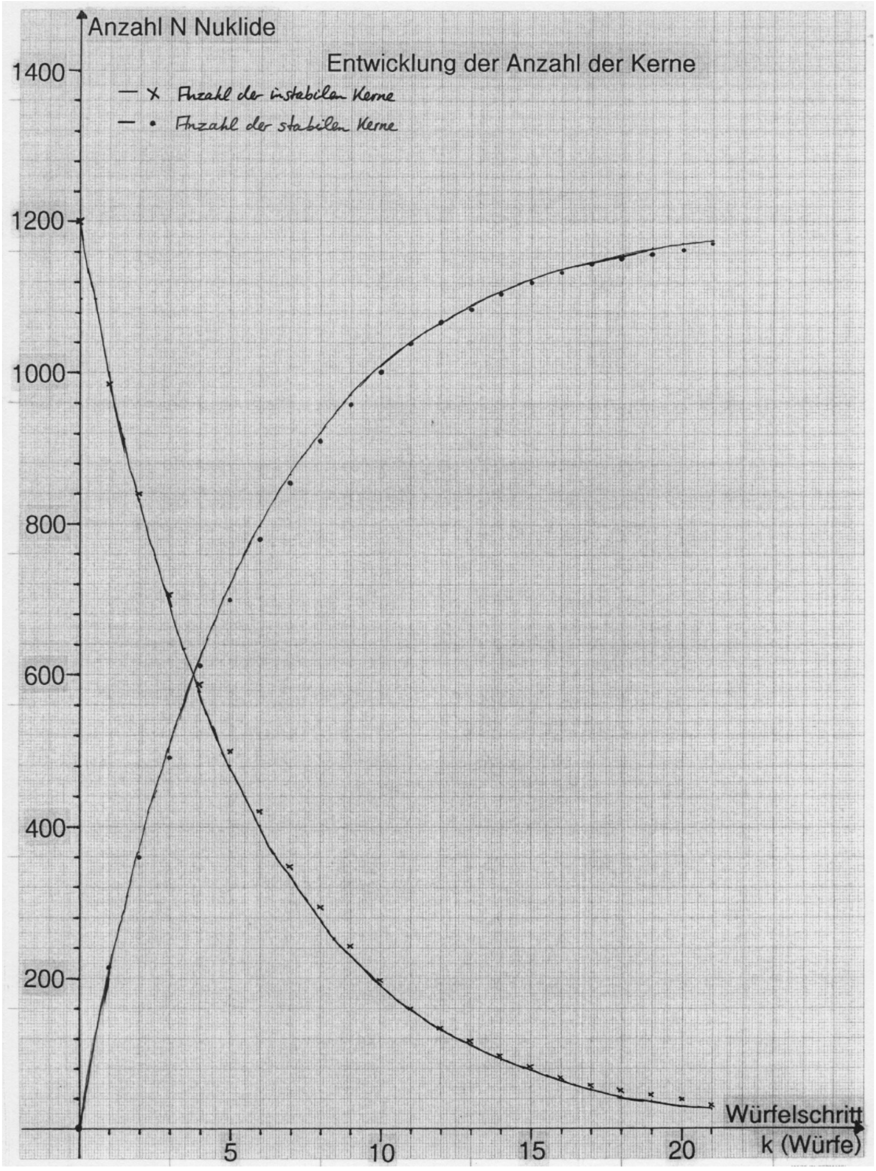
b) Berechnen Sie mit Hilfe einer Tabellenkalkulation ausgehend von anfangs 1200 Würfeln, die jeweils ein Mutternuklid repräsentieren, die Entwicklung der Anzahl der Kernanzahlen in Abhängigkeit von Würfelschritten $\Delta k = 0,25$. Wählen Sie eine Zerfallswahrscheinlichkeit von Würfelschritt zu Würfelschritt von $p_\mathrm{M} = 1/6$.

mögliches Ergebnis:

	A	B	C
1	**Simulation: direkter Zerfall in ein stabiles Endprodukt**		
2			
3	Anzahl $N_\mathrm{M}(0)$	1200	
4	Wahrscheinlichkeit p	=1/6	
5	Anzahl $N_\mathrm{E}(0)$	0	
6	Zeitschritt Δk	0,25	
7			
8			
9			
10	**Zeitschritt Δk**	**Anzahl Nuklide $N_\mathrm{M}(t)$**	**Anzahl Nuklide $N_\mathrm{E}(t)$**
11	0	=$B$3	=$B$5
12	=A11+$B$6	=B11+LN(1-$B$4)*B11*$B$6	=C11-LN(1-$B$4)*B11*$B$6
13	=A12+$B$6	=B12+LN(1-$B$4)*B12*$B$6	=C12-LN(1-$B$4)*B12*$B$6

c) Stellen Sie die Ergebnisse der Rechnung für das Mutternuklid und für die Nuklide des Endprodukts in dem bereits bestehenden Diagramm aus der Aufgabe 5b des vorangegangen Arbeitsblattes dar, indem Sie die berechneten Werte für ausgewählte Würfelschritte von k eintragen und eine ausgleichende Kurve einzeichnen. Vergleichen Sie sodann die Ergebnisse aus beiden Simulationen.

<u>mögliches Ergebnis:</u>



Die berechnete Anzahl an Nukliden ist in guter Übereinstimmung mit den Ergebnissen aus der Würfelsimulation. Die Gleichungen beschreiben die Veränderungen des jeweiligen Bestands zutreffend.

Mit Hilfe von Gleichung (5) lässt sich die Aktivität $A_{\mathrm{M},k}$ des Mutternuklids beschreiben, welches mit einer Wahrscheinlichkeit von p_{M} von Würfelschritt k zu Würfelschritt $k + \Delta k$ zerfällt.

Aufgabe 12:

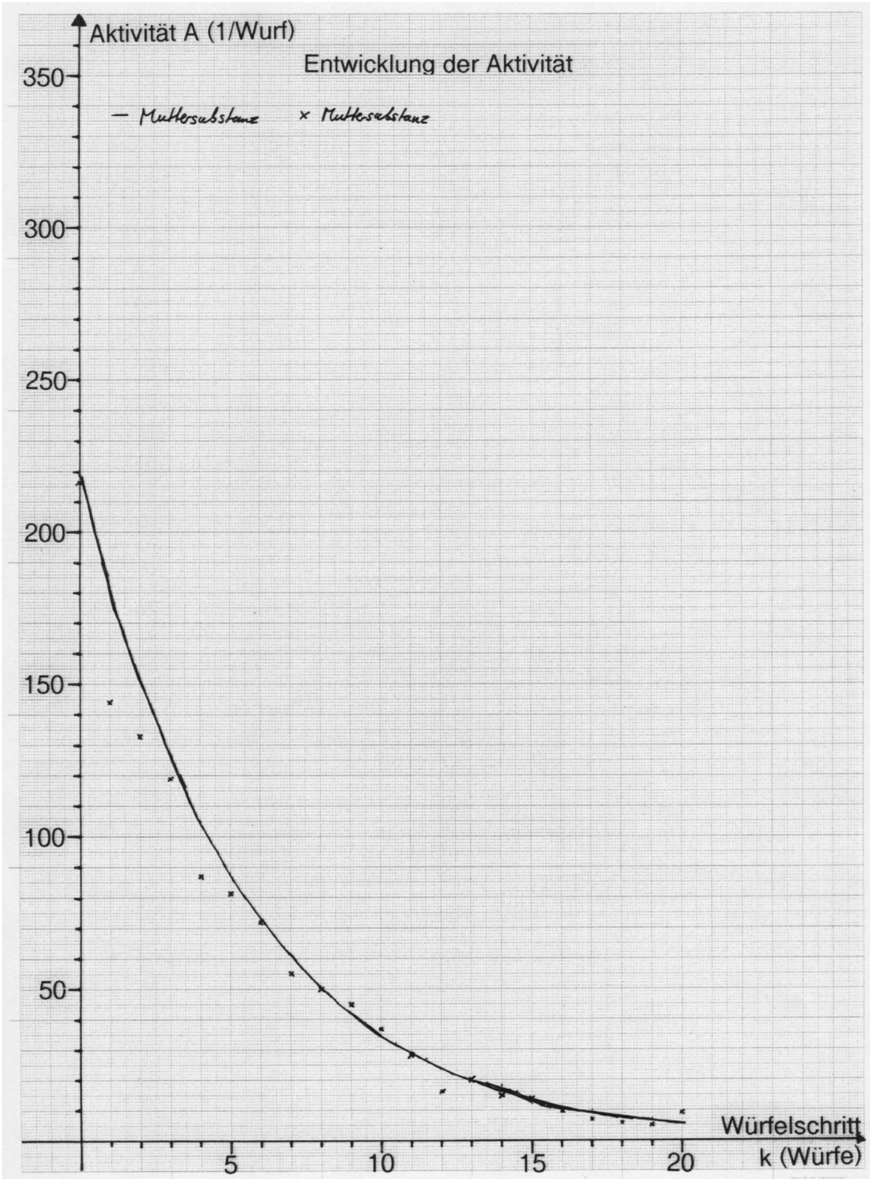
a) Berechnen Sie mit Hilfe einer Tabellenkalkulation nun für die vorangegangene Simulation die Aktivität des Mutternuklids.

<u>mögliches Ergebnis:</u>

	A	B	C	D
1	**Simulation: direkter Zerfall in ein stabiles Endprodukt**			
2				
3	Anzahl $N_M(0)$	1200		
4	Wahrscheinlichkeit p	=1/6		
5	Anzahl $N_E(0)$	0		
6	Zeitschritt Δk	0,25		
7				
8				
9				
10	**Zeitschritt Δk**	**Anzahl Nuklide $N_M(t)$**	**Anzahl Nuklide $N_E(t)$**	**Aktivität $A_M(t)$**
11	0	=$B$3	=$B$5	=-LN(1-$B$4)*B11
12	=A11+$B$6	=B11+LN(1-$B$4)*B11*$B$6	=C11-LN(1-$B$4)*B11*$B$6	=-LN(1-$B$4)*B12
13	=A12+$B$6	=B12+LN(1-$B$4)*B12*$B$6	=C12-LN(1-$B$4)*B12*$B$6	=-LN(1-$B$4)*B13

b) Stellen Sie die Ergebnisse der Rechnung für die Aktivität der Mutternuklide in dem bereits bestehenden Diagramm aus Aufgabe 5c des vorherigen Arbeitsblattes dar, indem Sie die berechneten Werte für ausgewählte Würfelschritte von k eintragen und eine ausgleichende Kurve einzeichnen. Vergleichen Sie sodann die Ergebnisse aus beiden Simulationen.

<u>mögliches Ergebnis:</u>



Qualitativ stimmen die Verläufe der Aktivitäten aus der Würfelsimulation und den Rechnungen überein. Die aus der Würfelsimulation bestimmte Aktivität streut um die berechneten Werte. Es ist anzunehmen, dass die Streuung mit wachsender Anzahl an Würfeln weiter abnimmt, da dies auch für den Übergang von 100 Würfeln zu 1200 Würfeln der Fall war.